PRACE NAUKOWE UNIWERSYTETU ŚLĄSKIEGO W KATOWICACH NR 2

PRACE MATEMATYCZNE I, 1969

TADEUSZ DŁOTKO

Sur certaines équations intégro-différentielles du n-ième ordre.

Dans cette note je donne quelques applications des théorèmes démontrés dans [2], aux équations intégro-différentielles de la forme

$$\varphi^{(n)}(t) = \Theta \int_{h(t)}^{\infty} f(t, \varphi(s))\, d_s r(t, s), \qquad \Theta^2 = 1, \tag{1}$$

où $f(t, x)$, $r(t, s)$ et $h(t) \leqslant t$ sont les fonctions données et $\varphi(t)$ est une fonction inconnue. L'intégrale est comprise au sens de Stieltjes, s étant la variable d'intégration.

Dans le cas plus spécial, où $r(t, s) = r(t, t)$ pour $s > t$ et $f(t, x) = x$, l'équation (1) devient l'équation differentielle linéaire à argument retardé

$$\varphi^{(n)}(t) = \int_{h(t)}^{\infty} \varphi(s)\, d_s r(t, s) \tag{1'}$$

du type qui à été étudié par A. D. MYCHKIS [7] et qui à son tour embrasse l'équation plus simple

$$\varphi^{(n)}(t) = f(t, \varphi(h(t))) \tag{1''}$$

étant le sujet des travaux de nombreux auteurs. En particulier les théorèmes que je donne ici généralisent certains résultats, contenus dans [1], [3], [4], [5], [6], [7], [8] et se rapportant aux équations du type $\varphi^{(n)}(t) = a(t)\varphi(h(t))$ ou bien $\varphi^{(n)}(t) = a(t)\varphi(t)$.

Les deux théorèmes, que je démontre dans cette note, concernent l'allure asymptotique des solutions des équations du type (1) sous certaines conditions autant faibles, qu'elles ne garantissent pas encore l'existence des solutions. Donc ces résultats seront applicables dans tout cas particulier, où on sait déjà, que l'équation envisagée remplit certaines autres conditions, suffisantes pour qu'il existe des solutions définies sur demi-axe positive des t.

Nous convenons d'entendre par solution de l'équation (1) toute fonction $\varphi(t)$ définie et continue pour $t \geqslant T$, où $T = \min h(t)$ (les hypothèses qui vont suivre, garantisseront l'existence d'un tel minimum) ayant les dérivées continues jusqu'à l'ordre n dans l'intervalle $\langle 0, \infty)$ et y satisfaisant à l'équation (1).

Vu le caractère des théorèmes, que nous allons démontrer il ne serait pas ici nécessaire de formuler des conditions initiales.

Voici quelques définitions et théorèmes, empruntées du travail [2]. Nous écrivons $\varphi(t) \geqslant' \alpha$ (resp. $\leqslant' \alpha$) lorsqu'il existe un nombre b tel, que l'on a $\varphi(t) \geqslant \alpha$ (resp. $\leqslant \alpha$) pour $t \geqslant b$ et qu'il n'existe aucun intervalle de la forme $\langle 1, \infty)$, dans lequel on ait $\varphi(t) \equiv \alpha$. Au lieu $\varphi(t) \geqslant' 0$ (resp. $\leqslant' 0$) nous écrivons aussi $s[\varphi]=1$ (resp. $s[\varphi]=-1$); dans ce cas que la fonction $\varphi(t)$ est de signe déterminé.

Dans cette note contrairement, que dans [2], je ne profite pas d'un certain lemme, donné dans [6].

1. Nous désignons par ϕ^n, $n=0, 1, \dots$ l'ensemble des fonctions $\varphi(t)$ définies et continuellement dérivables jusqu'à l'ordre n dans l'intervalle $\langle 0, \infty)$.

2. Nous désignons par A^n le sous-ensemble de ϕ^n formé des fonctions $\varphi(t)$, dites oscillantes, telles que $\sup\{t: \varphi(t)=0\}=+\infty$.

3. Nous désignons par ψ^{nk}, où $0 \leqslant k \leqslant n$, l'ensemble des fonctions $\varphi(t)$ telles que pour $t \geqslant T$ on a:

1° les fonctions $\varphi^{(i)}(t), i=0, 1, \dots, n$ sont de signes déterminés,

2° $s[\varphi^{(i)}]s[\varphi]=1$ pour $i=0, 1, \dots, k$,

3° $s[\varphi^{(j)}]s[\varphi]=(-1)^{j-k}$ pour $j=k+1, k+2, \dots, n-1, n$ $(k<n)$,

4° $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi^{(m)}(t)=0$ pour $m=k+1, k+2, \dots, n-1$ $(k<n-1)$,

5° il existe $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi^{(k)}(t)=g \neq \pm\infty$ et $s[g]s[\varphi] \geqslant 0$, si seulement $k \leqslant n-1$.

4. Désignons par B^{nk} le sous-ensemble ψ^{nk}, déterminé par la condition supplémentaire

$$\lim_{t\to\infty} \varphi^{(k)}(t) = 0.$$

Dans la note [2] on démontre quelques théorèmes, concernant des classes des solutions de l'équation fonctionnelle

$$(*) \qquad \varphi^{(n)}(t) = \Theta F\varphi(t), \quad t \geqslant a, \quad \Theta^2 = 1.$$

Le symbole F désigne une transformation, qui fait correspondre à toute fonction $\varphi(t)$ de classe ϕ^n une fonction $\psi(t)=F\varphi(t)$ de classe ϕ°.

Hypothèse H_1. Si $\varphi(t) \in \phi^n$ est de signe déterminé, la transformée $\psi(t)$ l'est encore et $s[\varphi]s[\psi]=1$.

Hypothèse H_2^*. Si $\varphi(t) \in \phi^n$ est de signe determiné et si $|\varphi(t)| \geqslant' ct^p$ où $c=\text{const}>0$ et p est un entier non négatif et inférieur à $n-1$, alors

$$\Big|\int^{\infty} s^{n-p-2} F\varphi(s)\,ds\Big| = \infty.$$

Theoreme 1 *de* [2]. *Dans l'hypothèse H_1 toute solution de l'équation* (*) *doit appartenir soit à la classe A^n, soit à l'une des classes ψ^{nk}, où $0 \leqslant k \leqslant n$; dans le cas où $\Theta=1$, on a $k \equiv n$ (mod 2), dans le cas où $\Theta=-1$, on a $k \leqslant n-1$ et $k \equiv n-1$ (mod 2).*

Theoreme 2* *de* [2]. *Si la transformation F satisfait aux hypothèses H_1 et H_2^*, toute solution $\varphi(t)$ de l'équation* (*) *appartient à l'une des classes A^n, ψ^{nn}, B^{n0}, les classes ψ^{nn} étant exclues pour $\Theta=-1$ et les classes B^{n0} pour $(-1)^n\Theta<0$.*

2. QUELQUES HYPOTHÈSES

Nous posons

$$\phi(t) = \int_{h(t)}^{\infty} f(t, \varphi(s)) d_s r(t, s).$$

Hypothèse K_1. La fonction $f(t, x)$ est définie et continue dans le domaine $D\{(t, x): t \geqslant 0, -\infty < x < +\infty\}$ et $f(t, x)x > 0$ pour $x \neq 0$. La fonction $r(t, s)$ est définie dans le domaine $\Delta = \{(t, s): t \geqslant 0, s \geqslant h(t)\}$ où $h(t)$ désigne une fonction continue pour $t \geqslant 0$, et $\lim_{t \to \infty} h(t) = +\infty$. La fonction $r(t, s)$ est non décroissante par rapport à s et il existe un $T \geqslant 0$ tel que pour chaque $t \geqslant T$ il existe un $p > h(t)$ pour lequel $r(t, p) > r(t, h(t))$.

Soit $\delta(t) = \bigvee_{h(t)}^{\infty} r(t, s)$ et supposons, que $\delta(t)$ est une fonction continue pour $t \geqslant 0$.

Hypothèse K_2. Il existe deux fonctions positives $\lambda(t) \in \phi^\circ$ et $\eta(t) \in \phi^\circ$ satisfaisant aux conditions suivantes: $\lambda(t) \to 0$ pour $t \to +\infty$, $|f(t, x)| \geqslant \eta(t)$ si $t \geqslant 0$ et $|x| \geqslant \alpha(t)$ et

$$\int^{\infty} t^{n-2} \delta(t) \eta(t) dt = +\infty.$$

Remarque 1. L'hypothèse K_1 entraîne l'hypothèse H_1 dans [2], page 101.

En effet étant supposé que $s[\varphi] = 1$, choissisons un T_1 tel que l'on ait $\varphi(s) \geqslant 0$ pour $s \geqslant T_1$. Ensuite fixons un tel T que l'on ait $h(t) \geqslant T_1$ pour $t \geqslant T$. Comme d'après l'hypothèse K_1 $f(t, x)x > 0$ pour $x \neq 0$, il est évident, que $f(t, \varphi(s)) > 0$ pour $t \geqslant T$ si $s \geqslant h(t)$ et $\varphi(s) \neq 0$. Mais $\varphi(s) \not\equiv 0$ dans l'intervalle $\langle T, \infty)$ et pour chaque $t \geqslant T$ il existe un $p > h(t)$ tel que $r(t, p) > r(t, h(t))$, donc $s[\phi] = 1$.

Pareillement $s[\phi] = -1$, lorsque $s[\varphi] = -1$.

Remarque 2. Des hypothèses K_1 et K_2 résultent les hypothèses H_1 et H^* dans [2] page 101.

Fixons les fonctions $\lambda(t)$ et $\eta(t)$ figurant dans l'hypothèse K_2. Soit p.ex. $\varphi(t) \in \phi^n$ et $\varphi(t) \geqslant' ct^p$, où $c = \text{const} > 0$ et p est un entier positif, $0 < p < n-1$. Alors $\varphi(t) \geqslant ct^p$ pour $t \geqslant T^*$. Il existe un $T \geqslant \max(1, T^*)$ tel que pour $t \geqslant T$ nous avons: $\varphi(t) \geqslant c$, $1 \leqslant h(t) \to +\infty$, $0 \leftarrow \lambda(t) < c$ pour $t \to +\infty$. En vertu de l'hypothèse K_2 $|f(t, x)| \geqslant \eta(t)$ pour $t \geqslant T$ et $|x| \geqslant \lambda(t)$. Donc

$$\phi(s) = \int_{h(s)}^{\infty} f(s, \varphi(\tau)) dr_\tau(s, \tau) \geqslant \int_{h(s)}^{\infty} \eta(s) d_\tau r(s, \tau) = \eta(s)\delta(s)$$

et

$$\int^{\infty} s^{n-2} \phi(s) ds \geqslant \int^{\infty} s^{n-2} \eta(s) \delta(s) ds = +\infty.$$

3. DEUX THÉORÈMES

THÉORÈME 1. *Dans l'hypothèse K_1, chaque solution $\varphi(t)$ de l'équation* (1) *appartient à l'une des classes A^n ou ψ^{nk}, où $0 \leqslant k \leqslant n$. En particulier si $\Theta = 1$, alors $k \equiv n$ (mod 2), si $\Theta = -1$, alors $k \leqslant n-1$ et $k \equiv n-1$ (mod 2).*

La démonstration résulte immédiatement de la remarque 1 et du théorème 1 de [2], page 103.

THÉORÈME 2. *Admettons les hypothèses K_1 et K_2, alors chaque solution $\varphi(t)$ de l'èquation* (1) *appartient à l'une des classes A^n, ψ^{nn}, où B^{no}. Plus exactement:*

si $\Theta=1$ et n est pair, $\varphi(t)$ appartient à A^n, ψ^{nn} où B^{no},

si $\Theta=1$ et n est impair, $\varphi(t)$ appartient à A^n où ψ^{nn},

si $\Theta=-1$ et n est impair, $\varphi(t)$ appartient à A^n où B^{no},

si $\Theta=-1$ et n est pair, $\varphi(t)$ appartient à A^n.

Les classes ψ^{nn} étant exclues pour $\Theta=-1$ et les classes B^{no} pour $(-1)^n\,\Theta<0$.

Démonstration. En effet, soit $\varphi(t)$ une solution de l'équation (1) et supposons qu'elle ne soit pas oscillante. En vertu du théorème 1 de [2] $\varphi(t)\in\psi^{nk}$ et le nombre k peut être égal à n seulement dans le cas où $\Theta=1$.

Nous pouvons donc admetre, que l'on a $0\leqslant k\leqslant n+1$. Nous admettons en outre, pour simplifier les notations, que $\varphi(t)\geqslant'0$. Nous allons voir, que le nombre k ne peut pas être supérieur à zéro. Sinon, nous aurions $\varphi^{(k)}\geqslant'0$ et la fonction $\varphi^{(k-1)}(t)$ serait positive et non décroissante. Donc il existerait un nombre $\alpha>0$ tel que $\varphi^{(k-1)}(t)\geqslant'2\alpha$ d'ou $\varphi(t)\geqslant\alpha t^{k-1}$ pour $t\geqslant b$, le nombre b étant suffisamment grand.

D'après (1), du lemme 3 de [2] et des hypothèses K_1 et K_2 on aurait que

$$\varphi^{(k)}(t)\geqslant\frac{1}{(n-k-1)!}\int_t^{\infty}(s-t)^{n-k-1}\phi(s)\,ds$$

d'où

$$\int^{\infty} s^{n-k-1}\phi(s)\,ds<+\infty\,.$$

En vertu de l'inégelité $\varphi(t)\geqslant\alpha t^{k-1}$, $\alpha>0$, $t\geqslant b$ et des hypothèses K_1 et K_2 nous aurions

$$\phi(t)\geqslant\delta(t)\eta(t)\qquad\text{pour}\qquad t\geqslant b$$

et

$$\int^{\infty} s^{n-k}\phi(s)\,ds=+\infty\,.$$

Dans cette relation nous allons voir, que l'indice $k=0$, ce qui est possible exclusivement dans le cas, où $\Theta=1$ et n pair, ou bien $\Theta=-1$ et n impair, en tenant compte du fait, que $\varphi(t)\in\psi^{n0}$ et de la condition 2° dans la définition de cette classe. Donc il reste de démontrer, que $\lim\varphi(t)=0$. En effet, dans le cas contraire, nous avons $\varphi(t)\geqslant'\alpha>0$, d'où en vertu de l'hypothèse K_2 et du lemme 3 de [2], résulteraient les inégalités

$$\infty=\int^{\infty} s^{n-2}\phi(s)\,ds\leqslant\int^{\infty} s^{n-1}\phi(s)\,ds<+\infty\,.$$

Cette dernière contradiction achève la démonstration.

Corollaires:

1. Si on admet $n=2$, $\Theta=-1$, $\sup\limits_{t\geqslant 0}(t-h(t))<+\infty$, $\delta(t)\geqslant m>0$ pour $t\geqslant 0$ et si $f(t,x)=x$, l'équation (1) prend la forme

$$\varphi^{(n)}(t)=-\int_{h(t)}^{\infty}\varphi(s)\,d_s r(t,s)\,,\tag{3}$$

et l'on obtient du théorème 2 le théorème, donné par A. D. MYCHKIS [7], page 157.

2. Si on admet, que l'équation (3) est de la forme

$$\varphi''(t) = \Theta M(t)\varphi(t-h(t)), \tag{4}$$

où $M(t) \geqslant 0$ et $\int^{\infty} M(t)dt = +\infty$, alors du théorème 2 il résulte pour $\Theta = 1$ une généralisation du théorème, démontré par G. A. KAMENSKIJ [4], page 204 et pour $\Theta = -1$ une certaine généralisation du théorème, donné par le même auteur [4], page 193.

3. Si l'équation (4) est de la forme

$$\varphi^{(n)}(t) = -M(t)\varphi(t), \qquad M(t) \geqslant 0 \tag{5}$$

on obtient du théorème 2 (comme dans [2]) les théorèmes, donnés par W. B. FITE [3], J. G. MIKUSINSKI [6], G. W. ANANIEWA et B. I. BALAGANSKIJ [1].

TRAVAUX CITÉS

[1] G. W. ANANIEWA, B. I. BALAGANSKIJ: *О колевлемости решений некоторых дифференциалных уравнений вышего порядка*, *Успехи математических наук*, XIV, 1 (85), 1959, p. 135—141.

[2] A. BIELECKI, T. DŁOTKO: *Sur certaines équations fonctionnelles*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A 14 (1960), p. 97—106.

[3] B. FITE: *Concerning the zeros of the solutions of certain differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc. 19 (1918), p. 341—352.

[4] G. A. KAMENSKIJ: *Об асимптотическом поведений решений линеиных дифференциалных уравнений второго порядка з запаздывающим аргуменмом. Ученые записки М.Г.У.* 7, 165 (1954), p. 195—204.

[5] A. KNESER: *Untersuchungen über die reellen Nullstellen der Integrale Linearer Differentialgleichungen*, Math. Ann. 42 (1893), p. 409—435.

[6] J. G. MIKUSINSKI: *On Fite's Oscillation Theorems*, Coll. Math. II, 1951, p. 32—39.

[7] A. D. MYCHKIS: *Линеиные дифференциалные ураьнения з запаздывающим аргументом*, Москва 1951.

[8] C. STURM: *Sur les équations différentielles linéaires du second ordre*, J. Math. Pure Appl., 1837, p. 106—186.

TADEUSZ DŁOTKO

O PEWNYCH RÓWNANIACH RÓŻNICZKOWO-CAŁKOWYCH RZĘDU n

Streszczenie

Praca dotyczy zastosowań twierdzeń udowodnionych w [2]. Zakłada się, że funkcja $\Phi(t) = \int_{h(t)}^{\infty} f(t,\varphi(s))d_s r(t,s)$ przekształca funkcje klasy C^n w przedziale $\langle 0, \infty)$ w funkcje ciągłe w tym przedziale, zachowując dla dostatecznie dużych wartości t znak funkcji $\varphi(t)$, jeśli był stały w jakimś przedziale $\langle a, \infty)$, $a \geqslant 0$. Ponadto istnieje liczba n taka, że

$$\int^{\infty} t^{n-2}\eta(t)\delta(t)dt = +\infty,$$

przy czym

$$\delta(t) = \bigvee_{h(t)}^{\infty} r(t,s) \quad \text{i} \quad 0(t) \leqslant |f(t,x)| \quad \text{dla} \quad t \leqslant 0 \quad \text{i} \quad [x] \geqslant \lambda(t) > 0.$$

Dowodzi się, że równanie $\varphi^{(n)}(t) = -\Phi(t)$ z parzystym n dopuszcza tylko rozwiązania oscylujące. Jeśli n jest nieparzyste, to możliwe są oprócz rozwiązań oscylujących rozwiązania dążące do zera wraz z pochodnymi aż do rzędu $n-1$ włącznie.

Równanie $\varphi^{(n)}(t) = \Phi(t)$ z nieparzystym n może mieć rozwiązania oscylujące lub dążące do nieskończoności wraz z pochodnymi aż do rzędu $n-2$ włącznie. Jeśli zaś n jest parzyste, to oprócz ostatnio wymienionych mogą jeszcze dojść rozwiązania zbieżne do zera wraz z pochodnymi aż do rzędu $n-1$ włącznie.

Podane wyniki uogólniają wyniki cytowane na początku pracy.

Oddano do Redakcji 8 kwietnia 1969 r.